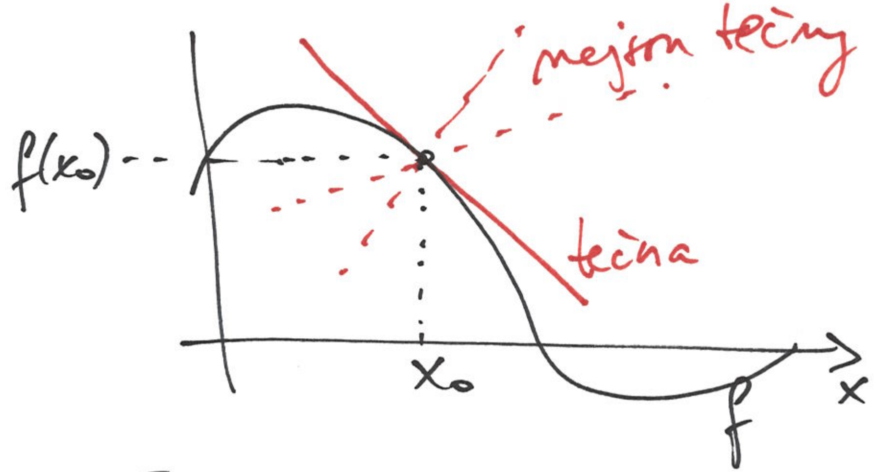
23.10.

Použití derivace ...

Tečna ke grafu fce

Def.: tečna ke grafu fce f v bodě x_0 je jediná přímka, která se dotýká grafu fce v bodě $[x_0, f(x_0)]$



Tečna je dána rovnicí $y = ax + b$, kde koeficient $\boxed{a = f'(x_0)}$ = směrnice tečny

Pozn: x_0 pevné, x proměnné

Jak určit koeficient b?
Víme, že tečna prochází bodem $[x_0, f(x_0)]$, tento bod stačí dosadit do rovnice $y = ax + b$ a odsud dopočítat b:

$$y = ax + b, \text{ dosadíme:}$$

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b \Rightarrow \text{odsud } b = \dots$$

Př: zadána fce $f(x) = x^2 - 1$, určete tečnu k této parabole v bodě $x_0 = 1$.

Nejprve zderivujeme: $f'(x) = 2x$
Dosadíme $x_0 = 1$: $f'(1) = 2$
tedy směrnice $a = 2$

1

Dále chceme znát b:

dosadíme $x_0 = 1$ do f:

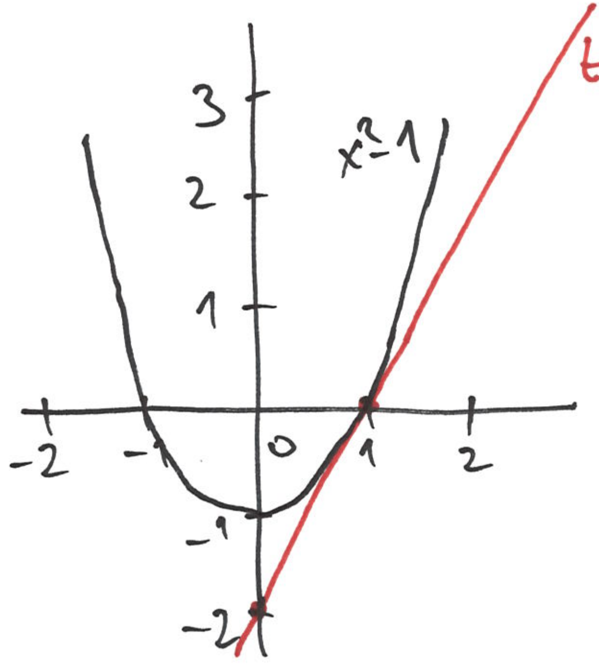
$f(1) = 0 \Rightarrow$ fce i tečna

procházejí bodem $[1,0]$

Bod $[1,0]$ dosadíme do rovnice

tečny: $0 = 2 \cdot 1 + b$

$\Rightarrow \underline{\underline{b = -2}} \Rightarrow$ tečna je $\boxed{y = 2x - 2}$



Nekonečná derivace

Př: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\left(\frac{1}{3} - 1\right)} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}}$

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Tedy v bodě 0 je def. původní fce, ale její derivace nikoli.

Existují aspoň jednostr. limity fce $f'(x)$ v bodě 0?

$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{0+} = \underline{\underline{+\infty}}$

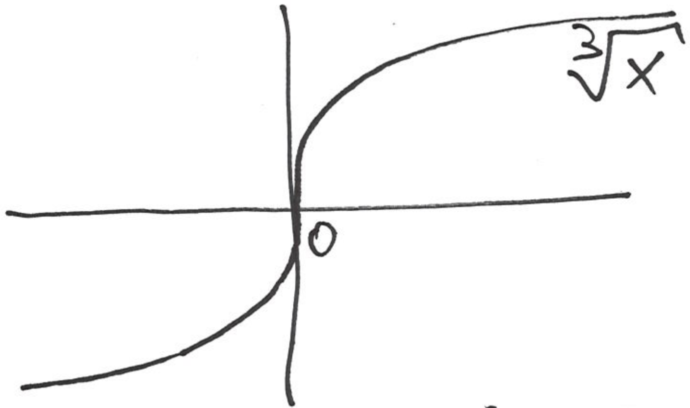
$\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{0+} = \underline{\underline{+\infty}}$

$\Rightarrow$ existuje i oboustranná $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \underline{\underline{+\infty}}$

$\Rightarrow$ Dodefinujeme derivaci $f'(x)$ v bodě 0 hodnotou $+\infty$, $f'(0)=+\infty$

... <u>nekonečná derivace</u>.

To má svůj význam:



fce $\sqrt[3]{x}$ má v bodě 0 <u>svislou tečnu</u>

tato tečna má rovnici $\boxed{x=0}$

(je to osa y)

Souvislost:

$$y = ax+b \quad \text{zde vypadá}$$
$$y = (+\infty)\cdot x + 0 \quad / : (+\infty)$$
$$x = \frac{y}{+\infty} = 0$$

<u>Jednostranné derivace</u>

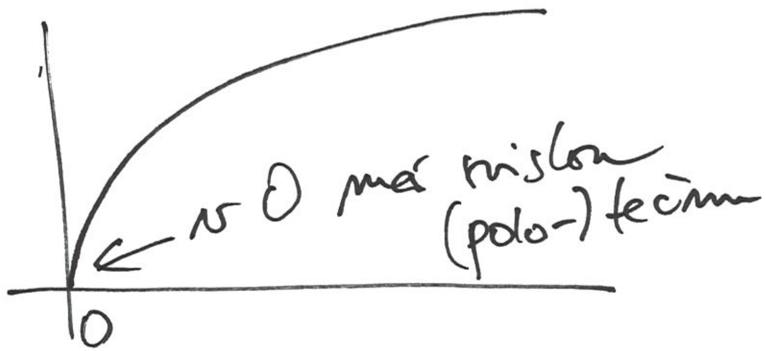
<u>Př</u>: $f(x)=\sqrt{x}$, $D_f=\langle 0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'}=(0,+\infty)=\mathbb{R}_+$

Opět dodefinujeme derivaci v nule její limitou, tentokrát jednostrannou:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\cdot 0+} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$\Rightarrow$ zavádíme <u>derivaci zprava</u> v bodě 0: $f'_+(0) := \lim_{x\to 0+} f'(x)$



Obdobně zavádíme derivaci zleva: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} f'(x)$

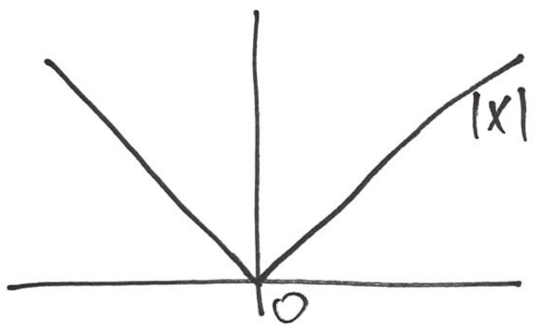
Př: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$

$\Rightarrow$ fce $|x|$ nemá v bodě 0 derivaci, jen jednostranné der.

$f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = 1$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-} f'(x) = -1$



Fce $|x|$ má v nule hrot, nemá tam žádnou tečnu.

L'Hospitalovo pravidlo

[lopital] čili Finta č. 4

pro výpočet limit. Používá se pro limity typu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ fér (které by nešly spočítat jinak).

L'Hospital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(pro lib. $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, vč. jednostr. limit)

Rovnost platí, jsou-li splněny podmínky:

a) (a1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

nebo (a2) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

b) limita vpravo existuje.

4

Pozn: v případě (a2) může mít čitatel konečnou limitu (tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$), pak

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{\pm\infty} = 0$$ (to víme už dávno)

Proto se L'Hosp. pravidlo v případě (a2) používá jen když $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Příklady:

1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x+5}{3x+1} \overset{F.1}{=} 2$$

Zkusíme totéž pomocí L'Hospitala:

(a) $\lim_{x \to +\infty} (3x+1) = +\infty$ ... platí (a2)

Tedy zderivujeme čit. i jmenov.:

$(6x+5)' = 6$
$(3x+1)' = 3$ $\Longrightarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x+5}{3x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$$

(b) limita existuje

---

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = „\frac{0}{0}“$$

Nefunguje kladná/záp. nula

vidíme, že je splněna podm. (a1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

(b) lim existuje

5

3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (a2)

Pozn: toto je limita typu $\frac{\infty}{\infty}$, vyšla 0, takže „e^x je silnější než x"

4) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = \underline{\underline{0}}$$

Použili jsme L'H třikrát!

Platí: pro $\forall p \in \mathbb{N}$: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0}$

Tedy e^x je silnější než jakákoli mocnina x (x^p)!

5) $$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \underbrace{(-\infty)\cdot 0}_{\text{nejde}}$$

Trik: součin převedeme na podíl

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{L'H}{=}$$

$$\begin{bmatrix} x\to-\infty \\ -x\to+\infty \\ e^{-x}\to+\infty \end{bmatrix} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} =$$

(a2)

$$= \frac{1}{-\infty} = \underline{\underline{0}}$$

Pozn: ? převést na podíl opačně?

$$x\cdot e^x = \frac{e^x}{x^{-1}}$$

$(x^{-1})' = (-1)\cdot x^{-2}$ toto nevede k cíli

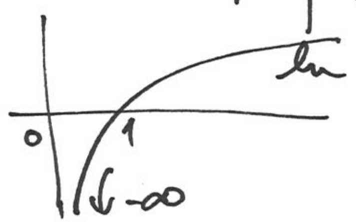
(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$

„log je slabší než x"

Spočteme $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{-1}{x^2}}}$

nebo jinak $(x^{-1})' = \underline{\underline{(-1)\cdot x^{-2}}}$ ← totéž

(7) $\lim\limits_{x\to 0+} (x\cdot \ln x) = 0\cdot(-\infty)$ nejde



Upravíme na podíl:

$x\cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$ ⟹

x je silnější než logaritmus

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0+}(-x) = \underline{\underline{0}}$